WILLIANE COSTA FERREIRA

MANUAL DIDÁTICO PARA UTILIZAÇÃO DO QUIZ PG PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

2020

WILLIANE COSTA FERREIRA

MANUAL DIDÁTICO PARA UTILIZAÇÃO DO QUIZ PG PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Produto educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira.

Maceió

2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

F383j Ferreira, Williane Costa.
O jogo digital Quiz PG para o aprendizado de progressão geométrica / Williane Costa Ferreira. – 2020.
163 f. : il., figs. e tabs. color. + material adicional

Orientador: Carloney Alves de Oliveira.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2021.
Inclui produto educacional.

Bibliografia: f. 137-145.
Apêndices: f. 147-163.

1. Progressão geométrica. 2. Quiz PG (Jogo digital). 3. Recursos didáticos. 4. Aprendizagem. 5. *App Inventor*. 6. Sequências didáticas. 7. Matemática (Ensino médio). I. Título.

CDU: 51: 371.3

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Coordenador – Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira

Vice coordenadora – Profa. Dra. Hilda Helena Sovierzoski

Produto Educacional apresentado à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Educação da Universidade Federal de Alagoas, aprovado em 27 de novembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira
Orientador
(Cedu/Ufal)

Lynn Rosalina Gama Alves
Assinado de forma digital por Lynn Rosalina Gama Alves
Dados: 2020.11.27 16:19:03 -03'00'

Profa. Dra. Lynn Rosalina Gama Alves
(UFBA)

João Batista Bottentuit Junior

Prof. Dr. João Batista Bottentuit Júnior
(UFMA)

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
(IM/Ufal)

2020

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este produto educacional é fruto da dissertação que tem por título “O jogo digital Quiz PG para o aprendizado de Progressão Geométrica”. A dissertação é resultado de uma pesquisa qualitativa que teve como principal objetivo analisar quais resultados o jogo digital Quiz PG pode produzir a partir da sua utilização didática para o aprendizado do conteúdo de Progressão Geométrica (P.G).

A P.G. é um conteúdo de matemática que faz parte do currículo da Educação Básica, de acordo com a BNCC (2018). Este geralmente é estudado por alunos que estão no primeiro ano do Ensino Médio. É um conteúdo que por vezes é compreendido apenas como mais um conteúdo de aplicação de fórmula e sem muita usabilidade para o sujeito que aprende. Desta maneira, se faz necessário que o aluno compreenda a utilidade das P.G. desde a antiguidade, em quais contextos este conteúdo está presente e que possa desenvolver a aprendizagem de forma interativa, colaborativa, com atribuição de sentido real para este sujeito, utilizando as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).

Ao refletir sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, que está presente em tudo que fazemos e ao nosso redor, percebeu-se, de acordo com leituras realizadas pela pesquisadora e por sua própria experiência, que quando o aluno está em sala de aula, muitas das vezes identifica-a como sendo tediosa, fatigante, sem relevância para sua vida social e profissional, pois nem sempre o professor enfatiza o motivo de estudar cada conteúdo do currículo escolar, nem traz uma abordagem que atraia a atenção do aluno, afim de que o mesmo se torne participante das atividades propostas.

Sendo assim, este manual didático propõe atividades que propiciem uma aprendizagem significativa dos alunos, com momentos de: interação entre os alunos, entre aluno e professor; debate sobre vídeos assistidos; resolução de problemas; utilização de um jogo digital; e tem a intenção de contribuir para que os professores de Matemática da educação básica possam desenvolver atividades de P.G. com seus alunos de forma prazerosa, desafiadora, estimulando o aluno a solucionar os problemas propostos a partir da experimentação do jogo, a realizar pesquisas, a levantar argumentos. Vale ressaltar que este manual foi elaborado no intuito de que os profissionais da área de Ensino de Matemática possam usufruir do mesmo e proporcionar uma aula diferenciada para seus discentes. No entanto, não queremos limitar o professor a utilizar o manual exatamente da forma que está, pois este pode desenvolver mais atividades, de acordo com a necessidade de seus alunos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A P.G. está presente em nosso dia a dia, seja em formas geométricas na natureza e em construções humanas (como o Fractal de Georg Cantor, o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch), no crescimento populacional de bactérias ou em aplicações financeiras (onde a taxa de juros aplicada somada a um inteiro pode ser caracterizada como a razão de uma P.G.). Conforme Carvalho (1997) e Eves (2011), a temática surge desde a antiguidade, onde os povos babilônicos encontravam padrões e os egípcios, tendo a necessidade de analisar o padrão de enchente do Rio Nilo, desenvolviam as sequências matemáticas e as progressões.

Na contemporaneidade, os alunos podem perceber padrões na numeração das casas e apartamentos, nas estações do ano, nas placas de automóveis, nos intervalos de tempo de tomar um remédio receitado pelo médico.

No Ensino Fundamental, especificamente em Matemática, os alunos se deparam com padrões e sequências numéricas, como por exemplo, ao estudar o conjunto dos números: naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais. Além disso, esses padrões podem ser percebidos pelos mesmos em problemas que envolvem Potenciação, Proporcionalidade e Figuras Geométricas.

No Ensino Médio, quanto à Matemática e suas Tecnologias, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018, “propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental” (BNCC, 2018, 517). Além disso, a BNCC (2018) propõe o desenvolvimento de competências e habilidades para a área de Matemática e suas Tecnologias. A Competência Específica 5, possui o seguinte objetivo (BNCC, 2018, p. 531):

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Para esta Competência Específica, a BNCC (2018) propõe 11 Habilidades, dentre as quais, tem-se a Habilidade (EM13MAT508): “Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BNCC, 2018, p. 533). Ou seja, no que se refere a P.G., a BNCC (2018) propõe que no Ensino Médio haja um aprofundamento de estudos e que sejam estabelecidas conjecturas sobre os conceitos e propriedades das P.G. (levando-se em consideração as demonstrações de tais propriedades, quando cabíveis), bem como a inserção de Tecnologias Digitais (TD) durante o aprendizado das P.G. Ademais, a BNCC (2018) também sugere que durante o Ensino Médio os alunos façam conexões das P.G. com funções exponenciais, análise de propriedades e resoluções de problemas. Isso não significa que se deva limitar o estudo de P.G. a estas abordagens, pois também é possível relacioná-la a outros conteúdos de matemática e/ou outras áreas do conhecimento.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000), nesta etapa escolar o aluno deve ter direito a "[...] compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas." (PCNEM, 2000, p. 96). Logo, no que se refere à aprendizagem sobre P.G., se faz necessário que o aluno aprenda a respeito deste saber matemático, a fim de promover a formação do desenvolvimento pessoal, da cidadania e da vida em sociedade deste indivíduo.

Segundo Soares (2011), ao se fixar apenas no uso das fórmulas, o aluno não evolui no raciocínio lógico, muito menos desenvolve a capacidade de solucionar os problemas propostos e, de acordo com Valmorbida (2018) a aprendizagem da Matemática voltada apenas para a teoria, sem atribuição de significado aos conteúdos, contribui para que o aluno a enxergue como "[...] uma disciplina distante da realidade, sem envolvimento com os fenômenos que ocorrem na natureza, na ciência, na tecnologia, entre outros." (VALMORBIDA, 2018, p. 17). Neste aspecto há que se considerar a importância do contexto histórico nas aulas de Matemática, pois, de acordo com Miguel (1997, p. 82), a "história é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino".

Além disso, acredita-se que as TDIC contribuam para a aprendizagem de Matemática, visto que a cultura digital já se encontra inserida no contexto social da geração atual, tornando o processo de aprendizagem mais instigante, atrativo e, ao inserir as tecnologias em sala de aula, ocorre uma inter-relação entre a cultura contemporânea e o ensino que, por meio de práticas pedagógicas adequadas, pode proporcionar uma aprendizagem com motivação, onde os alunos participam ativamente desse processo.

O ensino e aprendizagem por meio das TDIC podem ocorrer por meio da imersão em redes colaborativas de aprendizagem, acessando vídeos e *blogs* com conteúdos escolares, utilizando jogos educativos e vários aplicativos que contribuem para uma aprendizagem com atribuição de sentido real para estes sujeitos; onde o professor deixa de ser o centro e se transforma no mediador do conhecimento. Nesta perspectiva, propõe-se no presente manual uma Sequência Didática como contribuição para o ensino de Progressão Geométrica de alunos do Ensino Médio.

3. O JOGO DIGITAL QUIZ PG

O jogo digital educativo programado pela autora e utilizado na pesquisa que culminou em sua dissertação é um *game* do gênero *quiz* e o título deste é "Quiz PG". O jogo foi programado a partir da linguagem de programação em blocos do *App Inventor* 2, a fim de ser utilizado como atividade lúdica do conteúdo de P.G. Este jogo digital é compatível com dispositivos móveis *Android* e possui 4 interfaces: a interface Screen1 (tela inicial); a interface Regras (contém o objetivo, as regras e as recompensas do jogo; botão para iniciar o jogo e botão para acessar vídeo de conteúdo do Youtube); a interface QUIZ (onde foram inseridas as 12 questões do *game*) e a interface DADOS_DO_ALUNO (tela que os alunos acessam, ao ter finalizado o *quiz,* para inserir seu nome completo, sua turma e clica em enviar os dados). A Figura 1 mostra as quatro interfaces (Screen1, Regras, QUIZ, DADOS_DO_ALUNO), nesta mesma ordem, da esquerda para a direita, da forma que aparecem na tela do celular:

Figura 1: Interfaces do Quiz PG

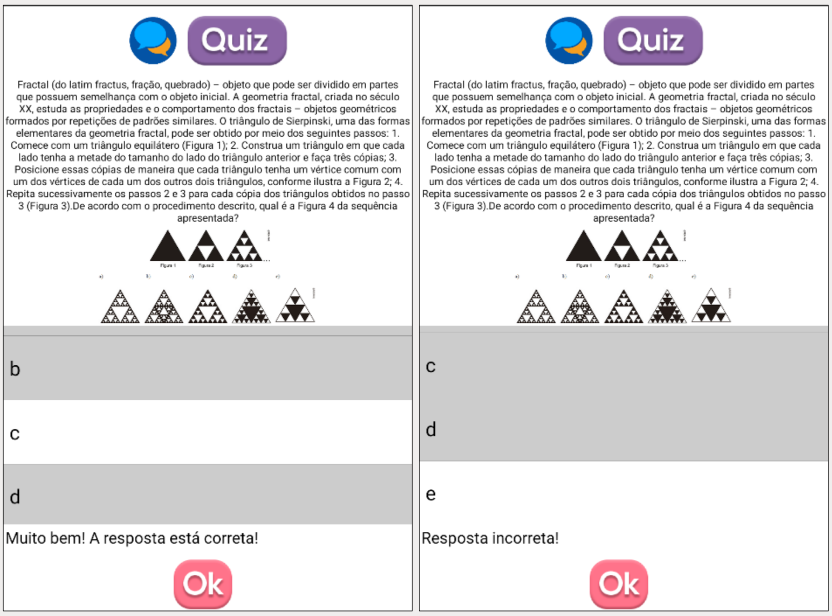
Fonte: A autora (2020)

Ao clicar no botão Iniciar da primeira interface do Quiz PG, o jogador vai para a interface que contém o objetivo, as regras e as recompensas do jogo. Nesta mesma interface, o jogador pode clicar no botão ASSISTIR VÍDEO e no botão INICIAR GAME. O objetivo do *game* é alcançar o maior número de pontos. As regras são: 1 - Você só possui uma vida (chance); 2 - Ao selecionar uma alternativa, aperte em *Ok*; 3 - Após selecionar uma alternativa, não pode selecionar outra da mesma pergunta; 4 - A cada acerto você ganha um ponto; 5 - A cada erro você não ganha ponto; 6 - Ao finalizar o *game* clique em Enviar. E as recompensas são: 6 pontos – ganha Medalha de Bronze; 9 pontos – ganha Medalha de Prata; 12 pontos – ganha Medalha de Ouro.

Após concluir a leitura do objetivo, das regras e das recompensas do *game*, o jogador tem duas opções: ou clica no botão INICIAR GAME e é direcionado à interface QUIZ, ou clica no botão ASSISTIR VÍDEO e é direcionado a uma página do Youtube que contém um vídeo do canal "reVisão", com o título "PROGRESSÃO GEOMÉTRICA | Matemática". O vídeo pode ser acessado pelo link: <https://www.youtube.com/watch?v=oaEapbD-umI>. Este vídeo possui 10 minutos e 36 segundos e traz uma abordagem do conteúdo de P.G. envolvendo a definição da P.G., sua classificação, as fórmulas que envolvem este assunto, com demonstrações dedutivas das fórmulas, exemplos de P.G., assim como traz um recorte histórico sobre o "Paradoxo de Zeno" que, no vídeo, o apresentador chama de "Paradoxo do Zenão".

Ao retornar para a interface Regras e clicar no botão INICIAR GAME, o jogador é direcionado ao primeiro problema matemático, com 5 alternativas de resposta, sendo correta apenas 1 alternativa. Foram inseridos no Quiz PG um total de 12 problemas a serem solucionados. Ao clicar na alternativa escolhida, o jogador já obtém um *feedback* do *game*, informando se ele acertou ou errou a questão-problema. A Figura 2 mostra este *feedback* no problema 1.

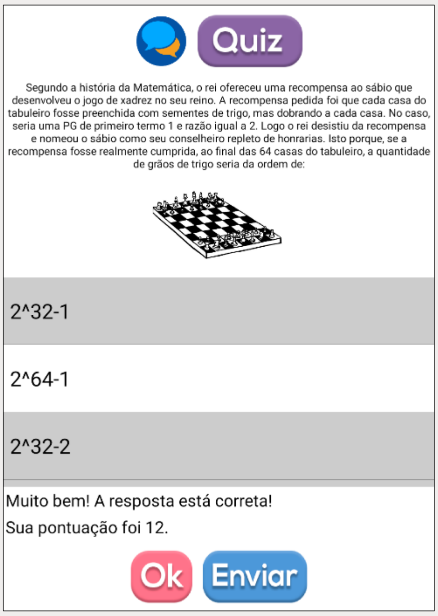
Figura 2: *Feedback* do Quiz PG no Problema 1



Fonte: A autora (2020).

Cada questão-problema possui um enunciado, uma ilustração e as alternativas (a,b,c,d,e) em barra de rolagem. Ao clicar em Ok, o jogador é direcionado a próxima pergunta, o *gamer* continua jogando, até que se tenham completado as 12 questões. Ao responder a última questão, além do *feedback* afirmando o acerto ou erro do 12º problema, o jogo digital mostra a pontuação total do jogador e o botão Enviar, que estava oculto, aparece. A Figura 3 apresenta um *feedback* possível.

Figura 3: *Feedback* do Quiz PG no Problema 12



Fonte: A autora (2020).

Ao clicar no botão Enviar, o jogador é direcionado à última interface do *game*, onde ele coloca seu nome completo e insere também a sua turma da escola. Este último item foi inserido devido ao fato de ter sido utilizado em uma turma de alunos, para a produção dos dados desta pesquisa. Ao clicar novamente em Enviar, agora na interface DADOS_DO_ALUNO, aparece o botão Sair. Ao ser clicado, o aplicativo do jogo é encerrado.

A partir da programação do *game* Quiz PG, foi possível perceber que, para compreender todas as funcionalidades do *App Inventor* 2 e programar demanda um certo tempo, mas a linguagem de programação em si é bem intuitiva. Devido a isso, alguns elementos como efeito sonoro, temporizador e animação não foram inseridos no *game* da pesquisa, embora seja possível utilizar estes e outros recursos na programação do jogo digital.

É necessário também ressaltar que – embora existam diferentes tipos de jogos e que quanto mais elementos e narrativas um *game* possui, quanto mais complexo ele for, mais potencial este tem para a aprendizagem – a partir do *App Inventor* a autora se propôs a construir um jogo do tipo *quiz* por ser viável para a mesma programar, levando em conta de que a construção foi realizada sem a colaboração de uma equipe de profissionais em desenvolvimento de jogos digitais.

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA – Progressão Geométrica		
Etapa: Ensino Médio	**8 horas-aula**	
Autor: Williane Costa Ferreira		
Instituição de Ensino:	**Cidade:**	**Estado:**

Objetivos	▪ Desenvolver o conceito de Progressão Geométrica e sua classificação. ▪ Compreender o contexto histórico das P.G. ▪ Fazer conexões do conteúdo de P.G. com outros conteúdos e áreas do conhecimento. ▪ Resolver questões-problemas envolvendo o conteúdo de P.G. utilizando o *game* Quiz PG.
Atividade Motivadora (Problematização)	Propor aos alunos que assistam ao vídeo "Lenda sobre a origem do jogo de Xadrez" disponível pelo *link* https://www.youtube.com/watch?v=MZJ_2weYsXU, com o auxílio do projetor multimídia, caixa de som, computador, *notebook* ou outro dispositivo móvel com acesso à *internet*, e em seguida solicitar que respondam: 1. Qual foi a soma total de grãos solicitada por Lahur Sessa? 2. Como os sábios do rei chegaram ao resultado da quantidade total de grãos pedidos pelo jovem Sessa? * Realizar outros questionamentos que achar necessário sobre o vídeo assistido.
Conteúdo	Progressão Geométrica e suas especificidades.
Recursos	Vídeos, notas de aula, papel A4 ou folha de caderno, lápis, caneta, borracha, projetor multimídia, caixa de som, computador, *notebook* ou outro dispositivo móvel com acesso à *internet*, *game* Quiz PG instalado nos dispositivos móveis que serão utilizados pelos alunos.
Desenvolvimento	**Encontro 1:** Conduzir os alunos a assistir ao vídeo "Lenda sobre a origem do jogo de Xadrez" e propor que responderam às perguntas referentes ao vídeo (Atividade Motivadora). Após as discussões e resoluções das perguntas, propor um segundo vídeo, com cenas do filme Duro de Matar 3 (1995) disponível pelo link https://www.youtube.com/watch?v=a8RL1QAV0z4 e propor que respondam as seguintes perguntas: 1) Qual a resposta para o enigma dado pelo vilão do filme duro de Matar? 2) Existe alguma relação deste enigma com o pedido de recompensa de Lahur Sessa, da lenda do jogo de Xadrez? **Encontro 2:** Desenvolver o conceito de Progressão Geométrica e sua classificação, utilizando o conteúdo escrito disponível neste manual (notas de aula) e retomar as discussões sobre os vídeos assistidos no Encontro 1. Solicitar que os alunos pesquisem sobre as aplicações da P.G. em figuras geométricas, na biologia e na música, e dialogar sobre as descobertas dos alunos em sala de aula. Mas, se a pesquisa não for possível durante este encontro, o professor pode solicitar a pesquisa como uma atividade extraclasse. **Encontro 3:** Dialogar com os alunos sobre a pesquisa solicitada no Encontro 2, caso ainda não tenha ocorrido este diálogo. Dar continuidade à parte teórica do conteúdo, tratando sobre a relação do conteúdo de P.G. com outros conteúdos e sobre a sua aplicação a outras áreas do conhecimento. **Encontro 4:** Instalar o *game* Quiz PG disponível na plataforma do *Google Play Store* por meio do *link* https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_wferreira390.PGQuiz&hl=pt_BR; fixar os conceitos trabalhados por meio de resolução de problemas, utilizando o *game*.
Avaliação	Avaliar o interesse e a participação do aluno de acordo com seu desempenho em cada atividade proposta, intervindo sempre que achar conveniente; analisar os resultados das atividades propostas e verificar se os alunos atingiram os objetivos propostos nesta Sequência Didática.

Notas de Aula – Progressão Geométrica (P.G.)

Progressão geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante q. O número q é chamado de **razão** da progressão geométrica.

Exemplos:

1. (3, 6, 12, 24, 48, 96, ...) é uma P.G. finita de razão $q = 2$.
2. $(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots)$ é uma P.G. infinita de razão $q = \frac{1}{2}$.
3. $(2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ \ldots)$ é uma P.G. infinita de razão $q = -3$.
4. $(5,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ é uma P.G. infinita de razão $q = 0$.
5. $(0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ é uma P.G. infinita de razão indeterminada.

<u>Classificação das progressões geométricas</u>

Uma P.G. é dita crescente quando: $a_1 > 0$ e $q > 1$, ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Uma P.G. é dita decrescente quando: $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Uma P.G. é dita constante quando sua razão é 1 ou quando todos os seus termos são nulos.

Uma P.G. é dita oscilante quando os seus termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos, daí: $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplo: $(3,\ -6,\ 12,\ -24,\ 48,\ -96,\ \ldots)$ é uma P.G. oscilante de razão $q = -2$.

Uma P.G. é dita estacionária quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

<u>Propriedade</u>

Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois, isto é, sendo $a \neq 0$, temos que:

$(a,\ b,\ c)$ é P.G. $\Leftrightarrow b^2 = ac$

Exemplo

Determine $x,\ x \in \mathbb{R}$, de modo que a sequência $(4,\ 4x,\ 10x + 6)$ seja P.G.

Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica P.G.

- $a_n = a_1 q^{n-1}$, onde:
- a_n é o termo geral;
- a_1 é o 1º termo;
- n é o número de termos (até a_n);
- q é a razão da P.G.

Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G.

Teorema

Sendo s_n a soma dos primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ \ldots, a_n, \ \ldots)$ de razão q, temos:

Se $q = 1$, então $s_n = na_1$.

Se $q \neq 1$, então $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Se $|q| < 1$, para $-1 < q < 1$, com $q \in \mathbb{R}$, então $S_n = \frac{a_1}{1-q}$

Exemplo

Calcular a soma dos dez primeiros termos da P.G. (3, 6, 12, ...).

Solução:

Como a razão $q = 2$, então:

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{3 \cdot 1024}{-1} = -3\,072$$

Teorema

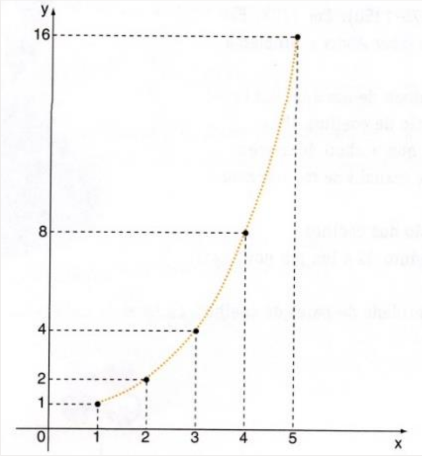
O limite de q^n, quando $n \to \infty$, de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ \ldots)$ de razão $|q| < 1$, para $-1 < q < 1$, com $q \in \mathbb{R}$, é zero, ou seja:

$$lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Contextualizando a P.G.

Dada a P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) de razão $q = 2$, esta é uma função exponencial $f(x) = 2^x$, com domínio em $\mathbb{N}^*$, como mostra a Figura 4, em que o eixo *x* refere-se à ordem dos termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ que correspondem aos valores do eixo *y* (1, 2, 4, 8, 16):

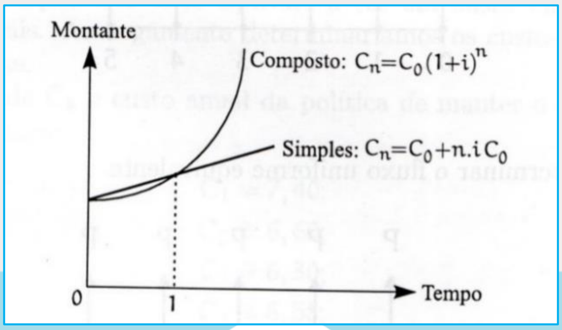
Figura 4: Gráfico de uma função exponencial



Fonte: Iezzi et al (2010, p. 217).

Já em relação à Matemática Financeira é dado o seguinte teorema: "*No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a $C_n = C_0(1+i)^n$*" (MORGADO et al, 2001, p. 45), que relaciona a P.G. ao regime de juros compostos. Segue a demonstração deste teorema: "Para cada *k*, seja C_k a dívida após *k* períodos de tempo. Temos $C_{k+1} = C_k + iC_k = (1+i)C_k$. Daí (C_k) é uma progressão geométrica de razão $1+i$ e $C_n = C_0(1+i)^n$ " (MORGADO et al, 2001, p. 45). A Figura 5 ilustra um gráfico que mostra os montantes de uma aplicação com juros compostos e de uma aplicação com juros simples, em que é possível verificar uma função exponencial para um montante a juros compostos.

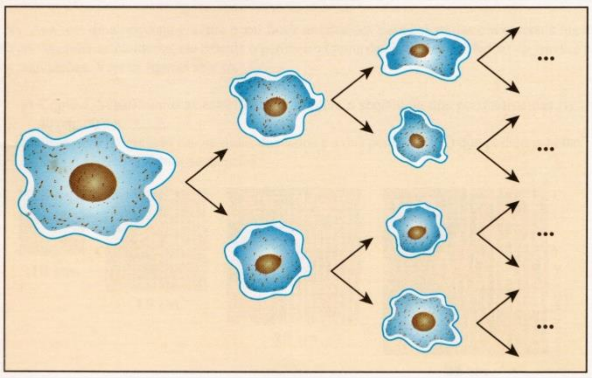
Figura 5: Gráfico dos montantes a juros simples e a juros compostos



Fonte: Morgado et al (2001, p. 56).

Outra aplicação da P.G. é na reprodução das amebas (protozoários), que se multiplicam através do processo de divisão. Depois de evoluir até “[...] um certo tamanho, uma ameba se divide ao meio para reproduzir outras duas. No período de um dia, aproximadamente, cada uma se divide ao meio formando quatro amebas no total. No dia seguinte existirão oito, [...]” (CARVALHO, 1997, p. 28), e assim sucessivamente, surgindo então a P.G. infinita (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...). Esse processo de divisão está ilustrado na Figura 6:

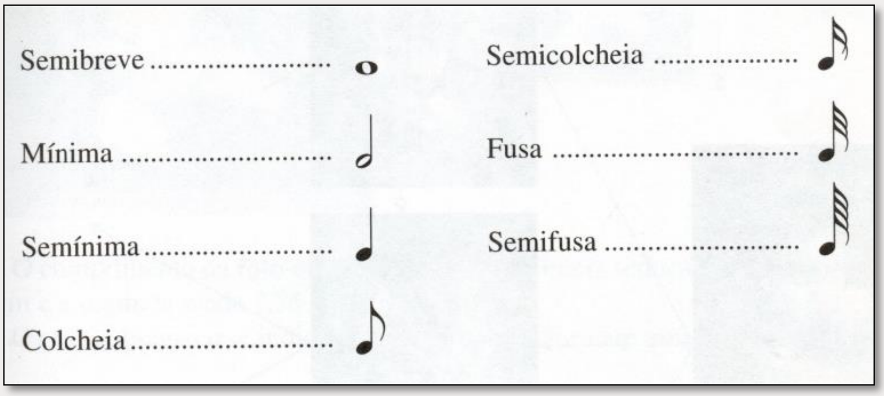
Figura 6: Reprodução das amebas



Fonte: Carvalho (1997, p. 28).

Na música, “Os sons musicais se escrevem por meio de sinais chamados notas. [...] Para indicar a duração dos sons, são dadas às notas formas diferentes. As formas (ou figuras) das notas são sete” (CARVALHO, 1997, p. 31) e estas notas estão ilustradas na Figura 7:

Figura 7: Notas musicais

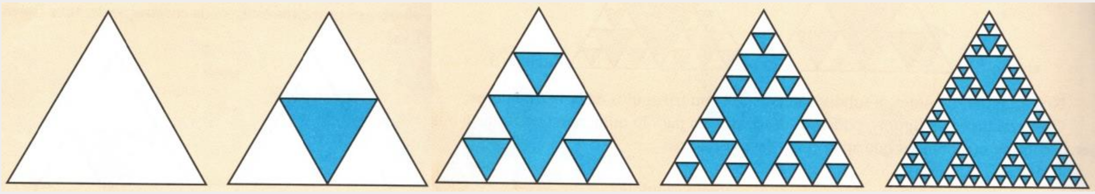


Fonte: Carvalho (1997, p. 31).

A semibreve é a nota musical que representa uma unidade rítmica. A Mínima equivale à metade do valor rítmico da semibreve, a semínima corresponde à metade do valor rítmico da mínima, e assim por diante, chegando à semifusa que possui metade do valor rítmico da fusa. Assim sendo, se a semibreve for considerada como primeiro termo da P.G., tem-se a seguinte sequência: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$, de razão $q = \frac{1}{2}$ correspondente aos valores rítmicos de cada nota musical.

De acordo com Carvalho (1997), um matemático polonês chamado Waclaw Sierpinski (1882-1969) criou em 1916 uma curva que ficou conhecida como Triângulo de Sierpinski. A partir de um triângulo equilátero "[...] tomamos os pontos médios de seus três lados. Encontramos, assim, quatro triângulos congruentes, dos quais retiramos o central. [...] Os três triângulos restantes têm os comprimentos dos lados exatamente iguais à metade do comprimento do lado do triângulo original" (CARVALHO, 1997, p. 30). Em seguida, o processo que foi realizado com o triângulo inicial é realizado com esses três triângulos, e assim continuadamente. Esse processo está ilustrado na Figura 8:

Figura 8: Triângulo de Sierpinski



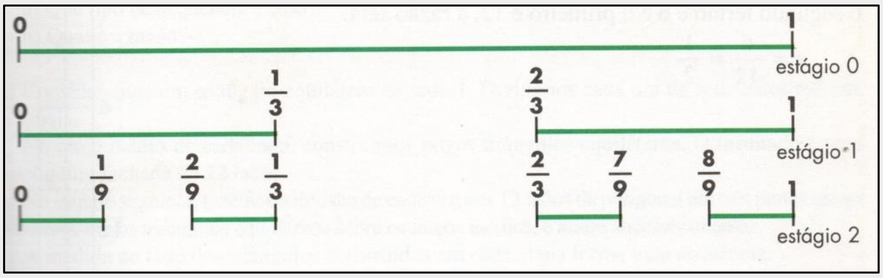
Fonte: Carvalho (1997, p. 30)

O Triângulo de Sierpinski é considerado um fractal[1], já que é uma figura auto semelhante, pois "cada triângulo obtido em cada etapa é uma pequena réplica do original [...]" (CARVALHO, 1997, p. 30). Este fractal considera em todas as etapas apenas os triângulos de cor branca, ou seja, a figura original possui um triângulo, a segunda figura contém três triângulos, a terceira tem nove triângulos, a quarta, 27 triângulos e assim sucessivamente, gerando a P.G. (1, 3, 9, 27, 81,...) de razão $q = 3$.

Outro fractal interessante é o do conjunto de Georg Cantor (1845-1918). Se for considerado o intervalo de números entre 0 e 1, a partir deste intervalo, é realizada uma divisão em três intervalos e se retira o intervalo que ficou no meio, ou seja, o terço médio, conforme Carvalho (1997). Dos intervalos que restaram, cada um é dividido em três novamente, retirando em seguida o terço médio destes intervalos e assim por diante. Esse fractal, "[...] que é formado por todos os números que não foram retirados dos intervalos quando repetimos o processo indefinidamente" (CARVALHO, 1997, p. 43) é o Conjunto de Cantor. A Figura 9 ilustra o início desse processo de divisão.

[1] Advindo da palavra "*fractus*", significa fração, quebrado, fragmentado.

Figura 9: Fractal de Cantor

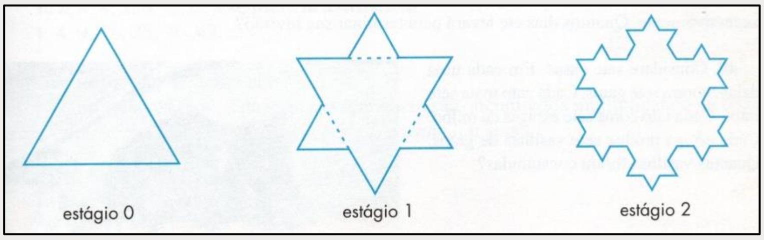


Fonte: Carvalho (1997, p. 43).

No estágio inicial (zero), nota-se que existe apenas um intervalo e a partir do estágio 1 tem-se dois subintervalos, no estágio 2 existem quatro subintervalos e, realizando a próxima divisão que gera o estágio 3, surgem oito subintervalos. Ou seja, cada estágio subsequente segue o padrão da P.G. infinita (1, 2, 4, 8, 16,...). Além disso, ao analisar a medida do comprimento dos intervalos que vão aparecendo ao longo dos estágios, nota-se a presença da P.G. $\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots\right)$, de razão $q=\frac{1}{3}$, em que o primeiro termo se refere à medida do comprimento do estágio zero, o segundo termo se refere à medida do comprimento do estágio 1, e assim sucessivamente.

Dado um triângulo equilátero de lado 1, considere que seja realizado os seguintes procedimentos: efetua-se a divisão de “[...] cada um de seus lados em três partes iguais. No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. [...] No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros [...]” (CARVALHO, 1997, p. 43) nos terços médios da figura e assim por diante. Este processo está ilustrado na Figura 10:

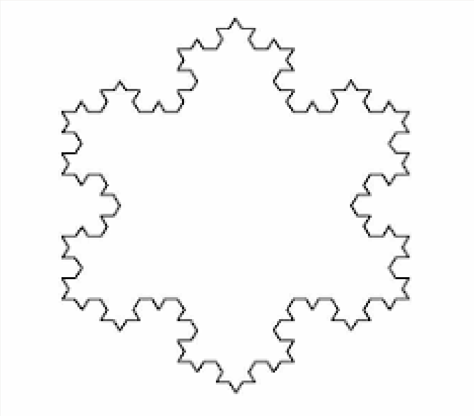
Figura 10: Curva de Koch



Fonte: Carvalho (1997, p. 43).

Ao analisar a medida do lado dos triângulos construídos em cada estágio, percebe-se o aparecimento da P.G. $\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots\right)$, que também aparece no Fractal de Cantor. Ao continuar este processo de divisão, chegando-se no estágio 4, tem-se a curva conhecida como curva do floco de neve de Koch, pois se assemelha a um floco de gelo. A Figura 11 ilustra a curva do floco de neve de Koch:

Figura 11: Curva do floco de neve de Koch



Fonte: Fuzzo et al (2009, p. 4).

5. FONTES DE PESQUISA COMPLEMENTARES

1. Introdução à Progressão Geométrica e Cálculo do Termo Geral

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41057

SCAN ME

2. Multiplicação e progressão geométrica com base no filme "A Corrente do Bem"

https://novaescola.org.br/conteudo/6566/multiplicacao-e-progressao-geometrica-com-base-no-filme-a-corrente-do-bem

SCAN ME

3. Ensino e Aprendizagem de Progressão Geométrica através da Resolução de Problemas

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uel_mat_pdp_josiane_aparecida_busquim.pdf

SCAN ME

6. REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** p. 1 – 109. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CARVALHO, M. C. C. S. **Padrões numéricos e sequências.** 1. Ed. São Paulo: Moderna, 1997. p. 1 – 79.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. Ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011. 843p.

FUZZO, R. A., et al. Fractais: algumas características e propriedades. In: ENCONTRO DE PRODUÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA, 4, 2009, Campo Mourão. **Anais do IV Encontro de Produção Científica e Tecnlógica**. p. 1 – 13. Campo Mourão, PR, 2009.

IEZZI, G., et al. **Matemática:** ciência e aplicações. Ensino Médio. V. 1. 6. Ed. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 205 – 220.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p. 73 – 105, jul./dez. 1997.

MORGADO, A. C., et al. **Progressões e matemática financeira.** 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001. 121p.

SOARES, L. R. S. **Sequências e Progressões:** Possibilidades de Contextualização na Escola. (Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, Mari, PB, 2011. p. 1 – 52.

VALMORBIDA, J. M. **Uma proposta de atividades para o estudo de Progressões Geométricas utilizando Fractais e o software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, SC, 2018. 124p.

Links de vídeos:

Lenda sobre a origem do jogo de xadrez – https://www.youtube.com/watch?v=MZJ_2weYsXU

SCAN ME

Trecho do filme Duro de Matar 3 (1995) – https://www.youtube.com/watch?v=a8RL1QAV0z4

SCAN ME

Link do Jogo Digital Quiz PG:

https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_wferreira390.PGQuiz&hl=pt_BR

SCAN ME